自己重力平衡系の熱力学的安定性判定

東北大学理学部天文学教室　鏑木　修

1. 自己重力系と熱力学

自己重力系の具体例は宇宙にある各種の天体であるが、多体系を形成しているものとしては、球状星団や銀河等がある。これらは、多数の星と希薄なガスから成る集団であるが、ガス成分を無視できる場合には、星自身を構成粒子とする気体あるいは流体の系とみなして熱力学的な記述をすることができる。また、多体系ではないが、重力場の本性によって熱力学的記述のできる興味深い例として、ブラックホールが知られている [1] 。

重力のような長距離相互作用の存在のもとでは、例えば、エネルギーの相加性が失われたり負の比熱が出現したりするので、熱力学的取り扱いや安定性の議論には細心の注意が必要とされる。さらにブラックホール熱力学の固有の問題としては、ブラックホール同士のエントロピーは超加算的であること（ただし、ブラックホールと周囲の物質のエントロピーは加算的)、温度のような変数のレッドシフト等がある。このうち、エントロピーの相加性が失われることは安定性の判定においては重大で、通常のエントロピー最大による判定法を考え直す必要が生じる [2] 。しかし、日本の天文学者達の大きな貢献もあって、恒星系の熱力学においては、その熱力学的安定性判定に対して従来の方法に本質的な変更を加える必要はなく、負の比熱に伴って生じる熱重力的カタストロフィーもこの枠組みの中で正しく理解されるに至っている [3] 。また、単体のブラックホールの安定性に関する限り（温度は無限遠の観測者に対する値を用いる)、事情は全く同様である [4] 。

我々は通常、系がある与えられた熱力学的環境に置かれた場合の安定性に興味を持ち、また環境を変えた場合の安定性の変化が知りたい。ところで、各環境における系の平衡状態の安定性は、環境によって指定される物理量を独立変数とするマシュー関数が、平衡状態のシリーズの近傍で極大になっているのかどうかによって決まる。つまり、平衡状態のシリーズに関する知識だけが与えられた場合でも、平衡状態から外れた方向への変化に関する情報をそこから引き出さなければならない。このような問題はカッツによって一般的に考察されたが [5] 、その主要な結論は次のとおりである。、

- 与えられた環境で、ある独立変数とその共役変数の組に着目して、後者を前者の関数としてプロットしたとき、その曲線に対する接線が無限大（垂直接線）を通って符号を変えるところ（転換点）で、安定性の変化が生じる。

- 少なくとも転換点の近傍では、正の接線を持つ分枝は負の接線の分枝より安定度が高い。

- 接線がゼロ（水平接線）を通って符号を変えるところは、安定性の変化には関係がない。

2. 平衡状態のシリーズと安定性の限界

ところで、カッツの論文 [5] では次の点が不明瞭である。すなわち、

- 上に述べた判定法の証明は、環境によって指定される熱力学変数がひとつの場合（非平衡のパラメーターは複数であるが）にしか与えられておらず、それが複数個ある場合にどう扱うべきかが自明ではない。

- 共役平面内に投影された平衡曲線の持つ接線の勾配とゆらぎの固有値との一般的対応関係が、明確に与えられていない。

- この接線の勾配がゼロを通って符号を変える場合には、なぜ安定性の変化が生じないのか明かでない。

そこで、これらの点に留意しつつ、カッツとは多少異なった観点（純熱力学的視点）から安定性の限界を導いてみよう [6]。

まず、熱力学的系の置かれた環境を指定する。これは、その系をコントロールする熱力学変数（$\{x_i\}, i = 1, 2 \ldots n$）と、それらを自然な独立変数に持つマシュー関数のタイプ（F）が与えられたことを意味する。このとき、各 x_i に対する共役変数は、$X_i = (\partial F/\partial x_i)_{\bar{x}_i}$ である（ただし、$\bar{x}_i = \{x_i\} - x_i$）。従って、平衡状態のシリーズが与えられている場合には、これらは独立変数の関数として計算できる（$X_i(\mathrm{eq.}) = X_i(\{x_j\})$、以下ではこれが滑らかな曲線で、分岐等も生じない場合だけを考える）。そこで、共役変数をこの関数関係から解放して $\{x_i\}$ と $\{X_j\}$ を共に独立変数とみなし、それらの変数を用いて書き直したマシュー関数を $\hat{F}(\{x_i\}, \{X_j\})$ で表すと、これは非平衡状態に対しても定義された熱力学関数となる。すなわち、共役変数の平衡値からのずれ（$\xi_i \equiv X_i - X_i(\mathrm{eq.})$）は非平衡のパラメーターとして働いているわけである。また、ここで導入した $\hat{F}$ は、力学におけるハミルトン関数とある種の類似性を持っていると言えよう。

系の安定性を判断するためには、その状態を平衡から少し外してみる必要がある。現実の系では、このような過程は、共役変数のゆらぎとして常に生じていると考えてよい。

これに対して、独立変数の方は、与えられた環境によって固定されている。数学的には、$\{x_i\}$ を固定して、$\hat{F}$のξに関する２次までの変分を計算すればよい。

$$(\delta \hat{F})_{\{x_i\}} = \sum_k \left(\frac{\delta \hat{F}}{\delta X_k}\right)_{\{x_i\}} \xi_k, \qquad (\delta^2 \hat{F})_{\{x_i\}} = \sum_{j,k} \left(\frac{\delta^2 \hat{F}}{\delta X_j \delta X_k}\right)_{\{x_i\}} \xi_j \xi_k. \tag{1}$$

これらの式中の各係数は$\hat{F}$の具体的な表式が与えられれば計算できるのだが、特に平衡シリーズ上での値に限れば、ルジャンドル変換を用いて一般的な形で求めることができる。ある指定された kに対して、独立変数 x_kを X_kに取り替えたマシュー関数を E_kと書けば、これともとの関数とは、$E_k = F - x_k X_k$で結ばれている。平衡状態のごく近傍で$\hat{F}$を $E_k + x_k X_k$で置き換えて計算すれば、１次の変分の係数は恒等的にゼロ、また２次の非対角項もゼロになり、

$$(\delta^2 \hat{F})_{\{x_i\}} = -\sum_k \lambda_k \xi_k^2, \qquad \lambda = -\left(\frac{\partial^2 E_k}{\partial X_k^2}\right)_{\bar{x}_k} = \left(\frac{\partial X_k}{\partial x_k}\right)_{\bar{x}_k}^{-1} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}\right)_{\bar{x}_k}^{-1}. \tag{2}$$

を得る。

このように、非対角成分がゼロになることは、各ゆらぎのモードを独立に扱うことを保証していると共に、λ_kがその固有値であることを意味している。上の式によれば、共役平面内の曲線の接線の勾配は固有値の逆数を表していることが判る。従って、２次の変分は転換点（勾配が発散する点、例えば図１ (a) のＰ点）で固有値ゼロを通って符号を変えるが、水平勾配（例えば図１ (a) のＱ点）では$\pm\infty$を通って符号を変える。このうち後者が安定性の変化と無関係であることは、固有値λの逆数がマシュー関数 Fの x に関する２階微分であることから明かである。すなわち、後者の場合この微係数がゼロを通って符号を変える。これは、マシュー関数の変曲点に対応している。これらのことは、図１ (a) を参照するとさらに良く理解できる。共役平面 x-X内の曲線は点Ｑにおいて x 軸と平行に走っているので、x 方向の２階微分に逆比例する固有値はこの点で非平衡に関する情報を全く含んでいない。これに対して、点Ｐでは曲線が x 軸に垂直に走っており、非平衡に関する情報を最大に含んでいると言える。従ってこの点の近傍では、正の固有値はマシュー関数の極大を、負の固有値は極小を意味する。この様子を示したのが図２で、カタストロフィー理論ではカスプ・タイプに分類されているケースである。

図１に戻って、このゆらぎのモードに対する安定性の変化をまとめよう。点Ｐの近傍では、パラメーター s が増加するとき接線の勾配は正から無限大を通って負に転じ，それに伴って平行状態は安定から不安定に変わる。この例では、共役平面内に他の転換点は存在しないので、これ以外に安定性の変化は生じない。図１ (b) には独立変数の関数としてのマシュー関数が描かれているが、これは (a) 図を x 軸方向に投影して得られる。共役面

内の転換点はマシュー関数のカスプに対応しており、また安定分枝は必ず不安定分枝の上側に現れる。ゆらぎのモードごとにこのような判定を行い、全てのモードに対して安定である部分が真に安定な状態である。いままで考えてきた環境に対して共役な環境とは、X_kを独立変数として$-x_k$を共役変数とするものである。この立場は、図1 (a) で曲線をx軸の正の側からながめることに相当する。従ってこの場合には、Qが転換点、Pが変曲点に入れ替わる。また、マシュー関数としてはFではなくE_kをプロットしなくてはならない。

3. まとめ

最後に、以上のような考察から得られた安定性判定に関連する結果をまとめておく。

- ゆらぎの各モードに対する安定性の変化は共役図中の転換点でのみ生じ、その近傍での接線の勾配が正の分枝が安定、負の分枝が不安定である。
- 安定性の限界は、考える環境によって一般に異なる。
- ゆらぎの固有値は感受率（比熱、圧縮率等）と関係を持つが、それらの結び付き方は環境を変えると変わり得るので、感受率の符号だけから安定性の判定はできない。
- 安定性の限界においては、常に関連するゆらぎの二乗平均が発散する。

参考文献

[1] J. D. Bekenstein, Phys. Rev. D **7** (1973) 2333; **9** (1974) 3292;
J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, Commun. Math. Phys. **31** (1973) 161; S. W. Hawking, Nature (London) **284** (1974) 30.

[2] P. T. Landsberg and D. Tranah, Collc. Phenom. **3** (1980) 73;
D. Tranah and P. T. Landsberg, *ibid.* **3** (1980) 81.

[3] S. Inagaki and I. Hachisu, Publ. Astron. Soc. Japan **30** (1978) 39;
M. Yoshizawa et al., *ibid.* **30** (1978) 279;
I. Hachisu and D. Sugimoto, Prog. Theor. Phys. **60** (1978) 123.

[4] O. Kaburaki, I. Okamoto and J. Katz, Phys. Rev. D 47 (1993) 2234;
J. Katz, I. Okamoto and O. Kaburaki, Class. Quantum Grav. **10** (1993) 1323.

[5] J. Katz, Mon. Not. R. Astron. Soc. **183** (1978) 765; **189** (1979) 817.

[6] O. Kaburaki, submitted to Phys. Lett. A.

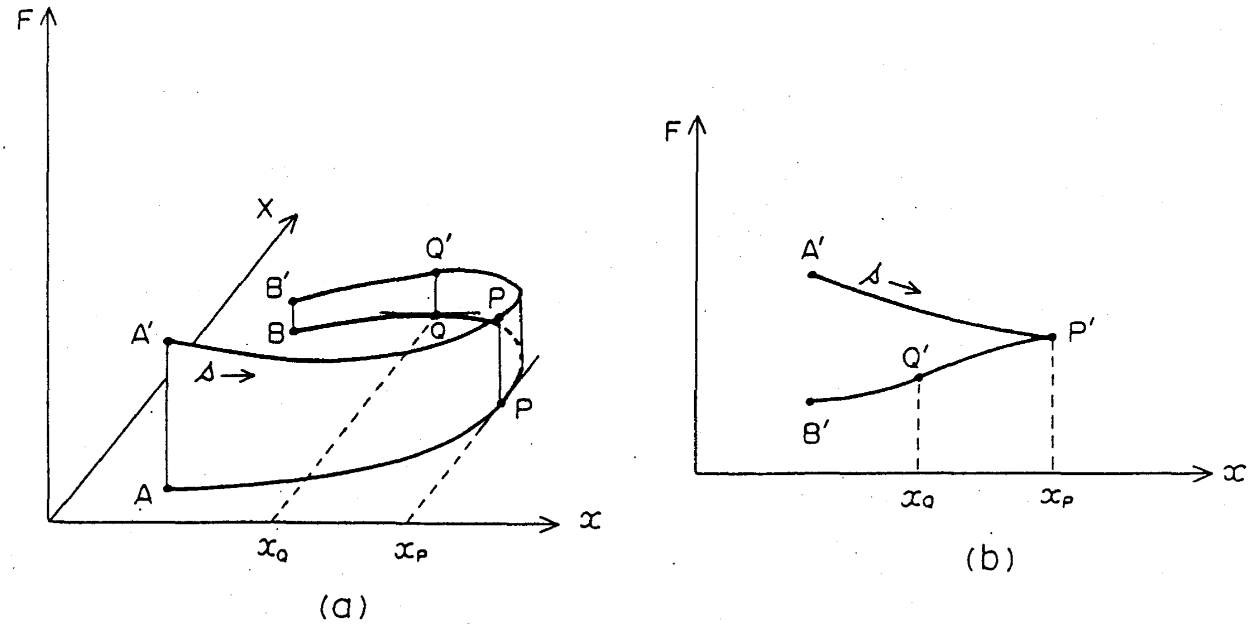

図 1　共役平面内の平衡曲線と、それに垂直にプロットされたマシュー関数。

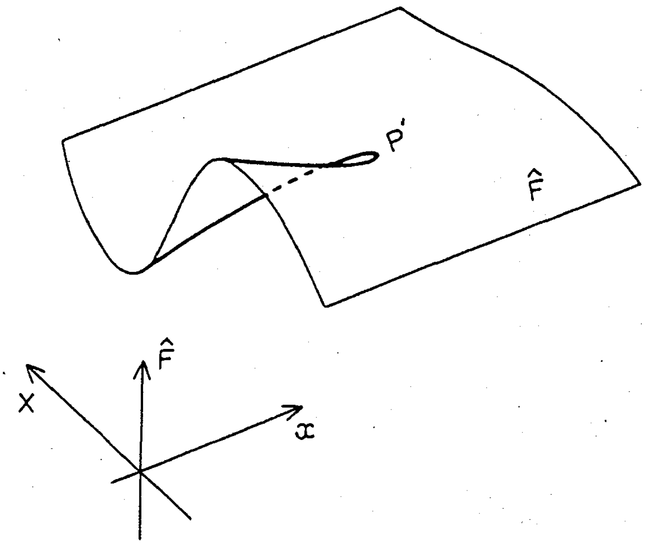

図 2　転換点付近での拡張されたマシュー関数の様子。
安定な平行状態（極大）の系列から不安定な平行状態（極小）の系列への推移が見て取れる。